

Equation de Sylvester

Lemme: Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall \lambda \in \text{Sp}(A) \text{ Re } \lambda < 0$. Alors, $\exists \alpha, K > 0$ telles que $\forall t \in \mathbb{R}_+, \|e^{tA}\| \leq K e^{-\alpha t}$.

Puisque $\mathbb{C}$ est scindé sur $\mathbb{C}$ par d'Alambert-Gauss, A admet une décomposition de Dunford $A = D + N$ avec D diagonalisable, N nilpotente et $DN = ND$. Alors $\exists P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Alors $\forall t \in \mathbb{R}_+, e^{tA} = P e^{tD} P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}$. On munit $M_n(\mathbb{C})$ de la norme $\| \cdot \|_\infty = \max_{i,j} |m_{ij}|$. On a $\forall t \in \mathbb{R}_+$

$$\|e^{tD}\|_\infty = \sup_i |e^{t\lambda_i}| = \sup_i e^{t \text{Re } \lambda_i} = e^{ct} \text{ avec } c = \sup_i \text{Re } \lambda_i. \text{ Par équivalence des normes, } \exists K_2 > 0$$

telle que $\| \cdot \| \leq K_2 \| \cdot \|_\infty$. Alors $\forall t \in \mathbb{R}_+, \|e^{tA}\| = \|P e^{tD} P^{-1}\| \leq \|P\| \|e^{tD}\| \|P^{-1}\| \leq \|P\| K_2 \|P^{-1}\| e^{ct}$.

De plus, puisque N nilpotente on a $\forall t \in \mathbb{R}_+, e^{tN} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} N^k$ d'où $\|e^{tN}\| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} \|N\|^k$. Donc $\|e^{tN}\| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$.

Alors $\forall t \in \mathbb{R}_+, \|e^{tA}\| = \|e^{tD} e^{tN}\| \leq \|e^{tD}\| \|e^{tN}\| = o(t^n e^{ct})$. Or $t^n e^{-ct} = o(e^{-\frac{c}{2}t})$, donc $\|e^{tA}\| = o(e^{-\frac{c}{2}t})$

avec $\alpha = \frac{c}{2}$. Alors $\exists K > 0$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}_+, \|e^{tA}\| \leq K e^{-\alpha t}$.

Théorème: Soit $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall \lambda \in \text{Sp}(A) \cup \text{Sp}(B), \text{Re } \lambda < 0$. Soit (S): $(AX + XB = C)$

équation de Sylvester, et (E): $(Y' = AY + YB, Y(0) = C)$. Alors (S), (E), admettent une unique sol

① Résoudre (E); ② Existence d'une solution de (S); ③ Unicité de la solution.

①

On réécrit l'EDL (E): $(Y' = L(Y), Y(0) = C)$ avec $L: M \in M_n(\mathbb{R}) \mapsto AM + MB \in M_n(\mathbb{R})$ linéaire.

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, (E) admet une unique solution globale.

Soit $Y: t \in \mathbb{R} \mapsto e^{tA} C e^{tB} \in M_n(\mathbb{R})$. On a $Y \in C^1(\mathbb{R}, M_n(\mathbb{R}))$, $Y(0) = C$, et $\forall t \in \mathbb{R}$

$$Y'(t) = A e^{tA} C e^{tB} + e^{tA} C e^{tB} B = AY(t) + Y(t)B. \text{ Donc } Y \text{ est la solution de (E).}$$

②

D'après le lemme, $\exists \alpha_1, \alpha_2, K_1, K_2 > 0$ tels que $\forall t \in \mathbb{R}, \|Y(t)\| \leq \|e^{tA}\| \|C\| \|e^{tB}\| \leq K_1 K_2 C e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)t}$.

Donc $\|Y(t)\| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ et $\int_0^{+\infty} Y(s) ds$ converge absolument, donc converge. Alors, on a $\forall t \in \mathbb{R}$

$$Y(t) - Y(0) = A \int_0^t Y(s) ds + \int_0^t Y(s) ds B, \text{ d'où en faisant } t \rightarrow +\infty \quad -C = -AX - BX \text{ avec } X = \int_0^{+\infty} Y(s) ds.$$

Donc X est solution de (S).

③

On vient de montrer que $L: M \mapsto AM + MB$ est surjective. D'après le théorème du rang, L est injective donc bijective. C'est à dire, (S) admet une unique solution X . $\square$

Remarque : (S) : $(Y = AY + BY, Y(0) = C) \Leftrightarrow (Z' = MZ, Z(0) = Z_0)$ EDL

On pose $\forall X \in M_n(\mathbb{R}), \text{Vec}(X) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ où $x_1, \dots, x_n$ colonnes de X .

On pose $\forall M, N \in M_n(\mathbb{R}), M \otimes N = \begin{pmatrix} m_{11}N & \dots & m_{1n}N \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1}N & \dots & m_{nn}N \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$.

On a $\forall j \in \{1, \dots, n\}, (MXM)_j = (MXM)_{ij} = \left(\sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n m_{ik} x_{k\ell} n_{\ell j} \right)_{i=1}^n = \sum_{\ell=1}^n n_{\ell j} \sum_{i=1}^n m_{ik} x_{k\ell} = \sum_{\ell=1}^n n_{\ell j} M X e_\ell$

Donc $\text{Vec}(MXM) = \begin{pmatrix} (MXM)_1 \\ \vdots \\ (MXM)_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{\ell=1}^n n_{\ell 1} M X e_\ell \\ \vdots \\ \sum_{\ell=1}^n n_{\ell n} M X e_\ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_{11}M & \dots & n_{n1}M \\ \vdots & & \vdots \\ n_{1n}M & \dots & n_{nn}M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (N \otimes M) \text{Vec}(X)$

Donc $Y' = AY + BY \Leftrightarrow \text{Vec}(Y') = \text{Vec}(AY) + \text{Vec}(BY) \Leftrightarrow (I_n \otimes A) \text{Vec}(Y) + ({}^t B \otimes I_n) \text{Vec}(Y)$

$\Leftrightarrow Z' = MZ$ avec $Z = \text{Vec}(Y), M = (I_n \otimes A) + ({}^t B \otimes I_n) \in M_n(\mathbb{R})$